**CF – Révisions – Corrigé**

**Exercice 1 :**

Partie 1 :

1. On pose , avec .

Alors

Or donc

Donc

Ainsi sous forme de système, on obtient :

De la première on déduit bien , et cela concorde bien avec les valeurs de et données.

1. On a et , et est continue sur . Ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe tel que .

Partie 2 :

1. Soient , on a
2. On pose

De plus, si c’est le cas, on a

1. Si l’on note les racines d’un polynôme du second degré unitaire, on a :

Ainsi et sont racines du polynôme

Le discriminant vaut

Ainsi on déduit :

1. On a

De même, on obtient

Ainsi .

**Exercice 2 :**

Considérons l’application définie par . est bien définie, car est définie et dérivable sur . De plus, car (et donc est dérivable de dérivée continue).

Ainsi et

Donc on peut appliquer le théorème de Rolle à  :

Il existe donc , tel que

Or

Donc

**Exercice 3 :**

Soit la série harmonique.

1. On peut prouver que est une suite croissante. Ainsi, en , elle ne peut se comporter que de deux manières :

* Elle diverge vers
* Elle converge vers

Supposons la seconde proposition :

Alors et donc . C’est absurde.

**Exercice 4 :**

1. On utilise le fait que est dense dans . Soit , il existe une suite de rationnels tels que . Alors , et donc quand , on obtient bien .

Pour contredire l’inégalité stricte, on peut prendre , et

Alors si on prend , on a et , donc , alors que pourtant pour tout , on a bien .

1. Soit . Par densité de dans , on peut supposer . Aussi, il existe et deux suites de rationnels qui convergent respectivement vers et . Alors

On passe à la limite pour trouver .

**Exercice 5 :**

On va procéder par analyse-synthèse.

Analyse : (= si j’ai une telle fonction, que cela implique-t-il sur cette fonction ?)

Soit , telle qu’il existe une fonction impaire et une fonction paire telles que :

Alors nécessairement :

Ainsi on obtient le système suivant : ,

Synthèse (= les fonctions auxquelles on arrive respectent-elles vraiment les conditions de l’énoncé)

Vérifions que les fonctions trouvées sont bien respectivement paires et impaires.

Ainsi les fonctions trouvées satisfont les conditions de l’énoncé, et quelque soit , on peut bien trouver une décomposition de celle-ci en deux fonctions, l’une paire et l’autre impaire.

**Exercice 6 :**

1. par calcul direct ou par résolution de l’équation .
2. et sont racines évidentes de .
3. On peut remarquer que , etc…

donc et et est au moins racine double de .

1. On a , donc est de degré 6.
2. est racine de multiplicité au moins 2, donc son conjugé l’est aussi. Un calcul simple donne , donc les racines de dans sont , et donc

Dans on peut utiliser le fait que , et donc